

**PERDIDA DE ENERGIA Y MASA POR COLAPSO Y RELAJACION VIOLENTA
EN SISTEMAS DE PARTICULAS**

**ENERGY AND MASS LOSS BY COLLAPSE AND VIOLENT RELAXATION IN
SYSTEMS OF PARTICLES**

J.L. Sérsic

OAC, CONICET

RESUMEN: Se desarrolló un modelo global para estudiar la evolución de un sistema dinámico que sufre los efectos de la relajación violenta. El modelo se aplica a distribuciones de densidad no homólogas y no esféricas, y permite estimar la pérdida de masa y energía después del colapso.

ABSTRACT: A global model for the evolution of a dynamical system going through violent relaxation is presented. The model applies to non-homologous non-spherical density distributions and allows the estimate of the energy - and mass-losses due to escapes after collapse.

INTRODUCCION

En la XXX Reunión de la A.A.A. llevada a cabo en San Juan, presentamos con M. Mosconi y D.G. Lambas un modelo global para la relajación violenta de un sistema de partículas. En él hicimos uso de una ecuación para la relajación ob

tenida en base a consideraciones intuitivas. El modelo al que nos referimos supuso la conservación de la energía en el sistema ligado que relaja, de suerte que los escapes son todos parabólicos.

En la XXXI Reunión que tuvo lugar en La Plata, el autor presentó un intento de fundamentar en principios básicos la ecuación para la relajación usada anteriormente. Las observaciones y críticas formuladas por mis colegas Navarro y Mosconi en Córdoba y Tignanelli en La Plata fueron sumamente valiosas para el afinamiento de los conceptos, así como la puesta a punto del formalismo empleado.

En este trabajo describimos los siguientes resultados:

- Ecuación de Relajación.
- Escala de Tiempo de la Relajación.
- El Escape de Partículas.
- Sistema de Ecuaciones para la descripción de la R.V.
- Pérdidas de Energía y Masa.
- Comparación con Experimentos Numéricos.

ECUACION PARA LA RELAJACION

La descripción global de un sistema dinámico de N partículas gravitantes se hace generalmente a través de la ecuación de Lagrange-Jacobi:

$$(1/2)J'' = 2E - U, \quad (1)$$

que vincula la derivada temporal segunda del momento polar de inercia J con la energía mecánica E y la energía potencial U del mismo. La ecuación precedente puede integrarse sólo si existiera una dependencia funcional $U(J)$, lo que sólo es posible para una clase particular de sistemas: aquellos

que evolucionan homológamente. En este caso, se tiene simplemente $U(J) = K/J^{1/2}$ y la (1) conduce a oscilaciones anarmónicas sostenidas. Tal ha sido el enfoque tradicional en este tema (Cf. McMillan, 1936; Chandrasekhar y Ebert, 1972; Ferronsky et al., 1979; Sunder y Kochhar, 1985, etc.).

Nos interesa aquí hallar las ecuaciones globales que describen la relajación hacia el equilibrio virial, en el caso general de configuraciones no-homólogas, aunque manteniendo suficiente generalidad como para no comprometerse con un determinado modelo para la distribución de materia en el sistema.

Para ello observemos que la integración de (1) es posible si conociéramos para todo t el valor numérico de U . Diremos que $W(J,t)$ es una representación de U si satisface la igualdad $W(J,t)=U$, para todo t . Debemos entonces encontrar una ecuación que nos de la dependencia de W sobre t , ya que obviamente W habrá de elegirse como homogénea de grado $-1/2$ en J .

Consideremos ahora una transformación infinitesimal dependiente del tiempo,

$$S = - \sum \theta_i(\tau) (x \cdot y)_i, \quad (2)$$

donde las x e y 's son las coordenadas y momentos de las N partículas y la $\theta_i(\tau)$ son otras tantas funciones de τ , que se anulan con $\tau \rightarrow 0$. En estas condiciones, la transformación será infinitesimal, se reducirá a la identidad en $\tau = 0$ y las $\theta_i(\tau)$ podrán elegirse de suerte que la transformación presente la relajación de las x e y 's en t para $\tau \rightarrow 0$.

La relajación global del sistema vendrá descripta entonces por

$$S = -\partial(\tau) \sum (x \cdot y)_i, \quad (3)$$

donde la única función $\theta(\tau)$ resulta de promediar las θ 's

$$\theta(t) = \Sigma \theta_i(\tau) (x,y)_i / \Sigma (x,y)_i$$

sobre el espacio de las fases. Resulta claro que

- $\theta(\tau)$ se anula con $\tau \rightarrow 0$, de suerte que (3) continua siendo infinitesimal,

- Excepto un entorno reducido de t_c , el tiempo de colapso del sistema, cuando $\Sigma (x,y)_i = 0$.

La aplicación de (3) a la hamiltoniana del sistema $H(x,y) = T(y) + U(x)$ nos conduce a una transformada,

$$K(x,y;t+\tau) = H(x,y) + (\mathcal{H};S) + \dots,$$

donde $(f;g)$ es el paréntesis de Poisson entre f y g . La expresión anterior se reduce a:

$$K(x,y;t) = H(x,y) = E, \quad (4)$$

para $\tau = 0$ en virtud del carácter infinitesimal de la transformación.

Por otra parte, el hecho de que H no contiene explícitamente a t , requiere que K satisfaga la ecuación:

$$\partial_t K = (K, \partial_t S). \quad (5)$$

Definamos ahora $W(J,t)$ como una función homogénea de grado $-(1/2)$ en J , que también depende explícitamente del tiempo, y pongamos

$$K(x,y;t+\tau) = T(y) + W(J,t+\tau),$$

donde $T(y)$ es la misma función que aparece en $H(x,y)$, la energía cinética. La (4) nos da entonces:

$$W(J,t) = U(x), \quad (6)$$

mientras que la (5), para $\tau = 0$, resulta

$$\partial_t W = (K, \partial_t S)$$

o bien,

$$\partial_t W = g \cdot (2E - W), \quad (7)$$

una ecuación para la dependencia temporal de W . Para arribar a (7) hemos recordado la homogeneidad de W respecto de J ,

considerado la conservación de la energía (4), y definido $g = \text{ABS}(\theta')$, de suerte que (7) sea válida tanto para $\theta > 0$ como $\theta < 0$. Las ecuaciones (6) y (7) definen unívocamente a W , siempre que conozcamos la dependencia temporal explícita de S ; es decir θ' , para $\tau \rightarrow 0$.

ESCALA DE TIEMPO DE LA RELAJACION

Consideramos los cambios δJ y δW introducidos por la transformación (3) en (1), tenemos:

$$(1/2)(\delta J)'' = -\delta W,$$

una expresión que se reduce a:

$$(\delta J)'' = -k^2 \delta J,$$

luego de recordar a (7) y donde hemos puesto $k^2 = -(W/J)$. La solución de la ecuación precedente que se reduce a cero con τ es proporcional a $\text{sen}(k\tau)$. Si además requerimos que $\delta J/J = 1$ en $k\tau = \pi/2$, resulta enseguida:

$$\begin{aligned} \theta(\tau) &= -(1/2)\ln(1-\text{sen}(k\tau)) \\ d\theta/d\tau &= k\cos(k\tau)/2(1-\text{sen}(k\tau)), \end{aligned}$$

para θ y su derivada. Siempre que $k\tau \neq \pi/2$, la escala de tiempo de la relajación descrita por (7) resulta ser el doble de la escala natural del sistema.

$$g = k/2 = (1/2)(-W/J)^{1/2},$$

un resultado ya hallado por medio de experiencias numéricas (García Lambas et al., 1985).

El uso de (3) como función generadora de la transformación conduce a las siguientes consecuencias:

a) En cada instante t , excepto la vecindad de t_c , la transformación produce en el sistema un cambio compatible con el real en la dirección radial.

b) Si dicho movimiento requiere un conjunto de θ 's que conducen a un valor constante de $\theta(\tau)$, el movimiento será homólogo, y entonces, ni S ni W dependerán explícitamente del tiempo.

c) Casi todos los sistemas dinámicos como los que consideramos aquí, poseen una función $\theta(\tau)$ dependiente del tiempo y siguen, en consecuencia, una evolución no-homóloga. En ellos, tanto S como W dependen explícitamente del tiempo y el miembro derecho de (7) nos provee la contribución de la no-homología al valor de W.

d) Aquellos sistemas que evolucionan homológamente forman un conjunto de medida nula, caracterizado por la condición $\theta=0$. Es sencillo ver que el valor constante de θ debe necesariamente ser cero, de lo contrario la correspondiente transformación se reduce a un mero cambio de escala.

SISTEMA DE ECUACIONES

Con (1), (7) y (8) podemos describir la evolución del subsistema ligado que rebaja. No nos extenderemos aquí en los detalles de cómo arribar al sistema de ecuaciones de trabajo, sólo nos limitaremos a escribirlas.

Con las nuevas variables $R^2=J$; $du=(-2/E)^{1/2}.dt/r$ y $w = (W/2E)$, tendremos:

$$(\ln w)' + R'/R = (1-w)/w^{1/2}, \quad (9a)$$

$$(\ln E)' = ch(1-w)/w^{1/2}, \quad (9b)$$

$$R'' = (4+(1/2)ch)R(1-w)/w^{1/2}. \quad (9c)$$

La tercera ecuación proviene directamente de (1), mientras

que las dos primeras resultan de (7) y (8), donde se ha postulado la continuidad de w y, en consecuencia, atribuido al término en ch el cambio de energía.

Para avanzar en la solución debemos ahora explicitar la estructura de $W(J,t)$. Es bien sabido que $W.R = Q.M^{2.5}$ (Ferronsky et al., 1987; García Lambas, 1985), donde M es la masa del sistema mientras que Q depende tanto de la concentración como la forma de la distribución de masa. Análogamente, introduzcamos el parámetro q por medio de $q = 2EiwR$, donde Ei es la energía mecánica del sistema antes del episodio de escape. Obviamente $q.\lambda = Q.M^{2.5}$, donde $\lambda = E/Ei$. Observemos ahora que q viene dado por la ecuación auxiliar,

$$(\ln q)' = (1-w)/w^{1/2}. \quad (9d)$$

Para retornar al tiempo Newtoniano en vez de la variable independiente u , tenemos finalmente:

$$t' = (-2E)^{1/2}R. \quad (9e)$$

Las ecuaciones (9) nos permiten conocer la evolución global del sistema a través del colapso y relajación violenta. En efecto, con las condiciones iniciales

$$u=t=0; R_i=1; R_i'=0; M_i=1; E_i=T_i-Q_i; w_i=Q_i/2E_i,$$

la solución dependerá de dos parámetros: la energía cinética inicial T_i , y la configuración inicial descrita por Q_i .

En el modelo que desarrollaremos enseguida no será necesario conocer $c(tc)$, ni usar explícitamente (9b).

PERDIDAS DE ENERGIA Y MASA

Aunque la función de distribución $f(x,y;t)$ de las partículas del sistema nos es desconocida, a través de adecuadas hipótesis constitutivas podremos calcular los cambios en energía y masa resultantes del escape de partículas en un

sistema de N cuerpos que colapsa y sufre relajación violenta. La justificación de nuestras hipótesis yace en el acuerdo de sus predicciones con los experimentos numéricos.

Representemos el episodio de escapes por un evento de muy corta duración centrado en el instante t_c de máximo colapso. Designemos un valor F cualquiera con F_b, F_a según se refiera a épocas inmediatamente antes (t_c^-) o inmediatamente después (t_c^+) del episodio de escapes. Si la cantidad F corresponde a una función continua en torno a t_c , escribiremos F_c para su valor en t_c . Escribamos, además,

$$\lambda = E_a/E_b = E/E_i \text{ y también } M = M_a/M_b = M_a/1.$$

El cambio en energía mecánica en el subsistema que relaja, debido a los escapes es $E_i(\lambda-1)$, mientras que el cambio en energía potencial W_a-W_b es una fracción $k < 1$ del mismo. Los experimentos numéricos sugieren fuertemente $k=1/2$, lo que equivale a equipartir la energía perdida entre W y T . Esta condición nos lleva a:

$$\lambda = (Q_b - E_i R_c) / (2q_c - E_i R_c) , \quad (10)$$

una expresión para el cambio de energía. De la integración del sistema (9) obtenemos q/Q_i y R como funciones del tiempo t y T_i/Q_i como parámetro. Para $t=t_c$ se halló:

$$q_c/Q_i = .7956 + .8997(T_i/Q_i) - 1.1599(T_i/Q_i)^2 + .356(T_i/Q_i)^3,$$

$$R_c = .2076 + .9190(T_i/Q_i) + .5395(T_i/Q_i)^2 + 1.369(T_i/Q_i)^3,$$

(en un sistema de unidades donde el mínimo absoluto de Q , $Q_0 = .464758$, fue tomado como unidad). A causa de que $E_i = T_i = Q_i$, resulta que λ es función sólo de T_i/Q_i y de Q_b/Q_i . Para

colapsos fríos o tibios ($T_i/Q_i \ll .5$) la configuración del sistema inmediatamente antes de los escapes, recuerda lo que Wintner (1947) llama configuración central, y en consecuencia, Q_b se aproxima indefinidamente al valor mínimo permisible Q_0 ($=1$ en nuestras unidades), (García Lambas et al., 1985; también Ferronsky et al., 1987). De esta suerte λ puede conocerse para colapsos fríos y tibios. Por otra parte, las pérdidas de energía no son siempre posibles; cuando $Q_b=Q_c$ se tiene $\lambda = 1$ y aquellas configuraciones iniciales con Q_i mayor que Q_b/Q_c son incapaces de ello.

Para escribir una ecuación análoga a (10) para la masa M , debemos antes probar el siguiente lema: Si dividimos las partículas de un sistema gravitante de masa M en dos grupos M_1 y M_2 , de modo que sea $M_1+M_2=M$ e imponemos la condición que las partículas de ambos grupos asumen similares distribuciones espaciales, entonces, si W es la energía potencial del sistema, ésta cambiará según

$$\partial_M W/W = 1/2, \quad (11)$$

cuando las partículas que conforman el grupo M_2 son extraídas súbitamente del sistema y $M_2 \rightarrow 0$.

La línea de la demostración se basa en la similitud de las distribuciones espaciales, que permite escribir la energía de interacción entre ambos grupos como $(1/2)W_1.M_2$, y la pequeñez de M_2 , que permite despreciar W_2 , la energía potencial de las partículas del segundo grupo.

Ya que no hay razones para que las partículas que vayan a escapar estén espacialmente distribuidas en forma diferente a las restantes en una configuración central, el lema anterior nos permite usar la (11), y en consecuencia, tenemos $W_a - W_b = -f(1-M) \partial_M W_b = -(f/2)(1-M)W_b = Q_b - \lambda Q_c$. Aquí hemos supuesto que es sólo una fracción f de la masa de las partículas que escapan la responsable de la energía perdida por el sistema. El complemento al total, $(1-f)(1-M)$, es la masa

de las partículas que escapan con energía cero (escapes parabólicos). Resulta así la expresión para M , o sea, la masa que resta en el sistema después de los escapes,

$$M = (1+2/f) - (2/f)qc \lambda/Qb \quad (12)$$

y los experimentos numéricos sugieren, de nuevo, que $f=1/2$ es una buena aproximación. Ello significa que la función de partición de las partículas que escapan es cercana a la de equilibrio, $\exp(-pE)$.

A poco de que se lleven estos resultados a (1), es posible establecer la conexión entre las condiciones dinámicas globales del sistema antes y después del episodio de escapes. Hallamos así:

$$J_e = (5/2)E_i(\lambda-1)(t-t_c)^2,$$

para el momento de inercia del sistema de partículas que escapa y, después de algún álgebra,

$$\sigma^2 = (5/2)E_i(\lambda-1)/(1-M) = 5Qb/4Rc,$$

su dispersión de velocidades.

COMPARACION CON EXPERIMENTOS NUMERICOS

Julio Navarro y Mirta Mosconi realizaron experimentos numéricos para comprobar los supuestos del modelo y sus predicciones, si bien las interpretaciones son responsabilidad del autor, agradezco a ellos su paciencia, cuidado y críticas.

Se usó un código N-Body de Aarseth con $N=400$ partículas de igual masa y un ablandamiento igual a $1/100$ de la distancia interpartícula media en el momento de colapso. Para discriminar cuáles partículas adquieren energía positiva para configurar un posible escape, se usó un procedimiento iterativo desarrollado por Navarro et al. (1987). De esta

suerte fue posible calcular los momentos de inercia, parámetros de estructura, etc. tanto para las partículas ligadas, cuanto para las que escapan, así como también el cambio en energía y masa, y la tasa de escapes, que resultó ser altamente concentrada en torno a t_c , justificando así nuestra aproximación impulsiva.

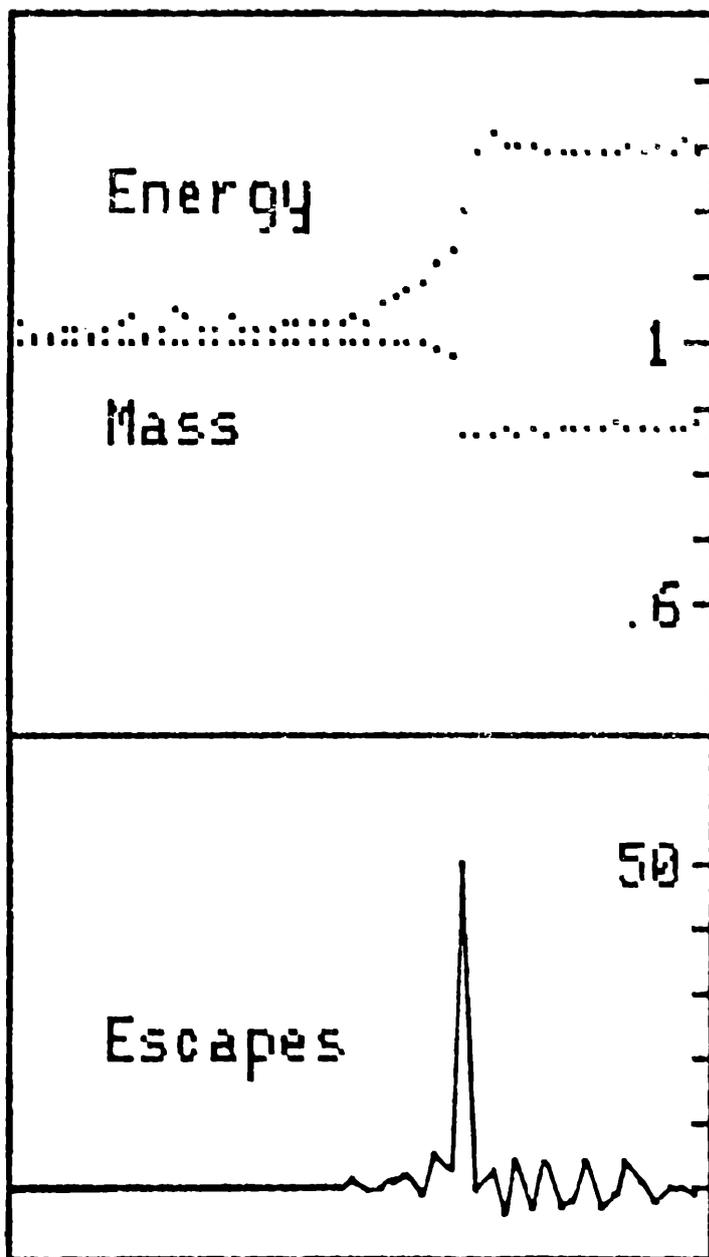


Figura 1: Arriba: cambios en energía mecánica total (E) y masa (μ) en el subsistema ligado que relaja violentamente. Abajo: tasa de escape de las partículas en el mismo caso. Nótese el agudo pico en el instante de colapso t_c y las oscilaciones de baja amplitud que siguen después. La información para esta figura proviene de un colapso frío de $N=400$ partículas computado por J. Navarro.

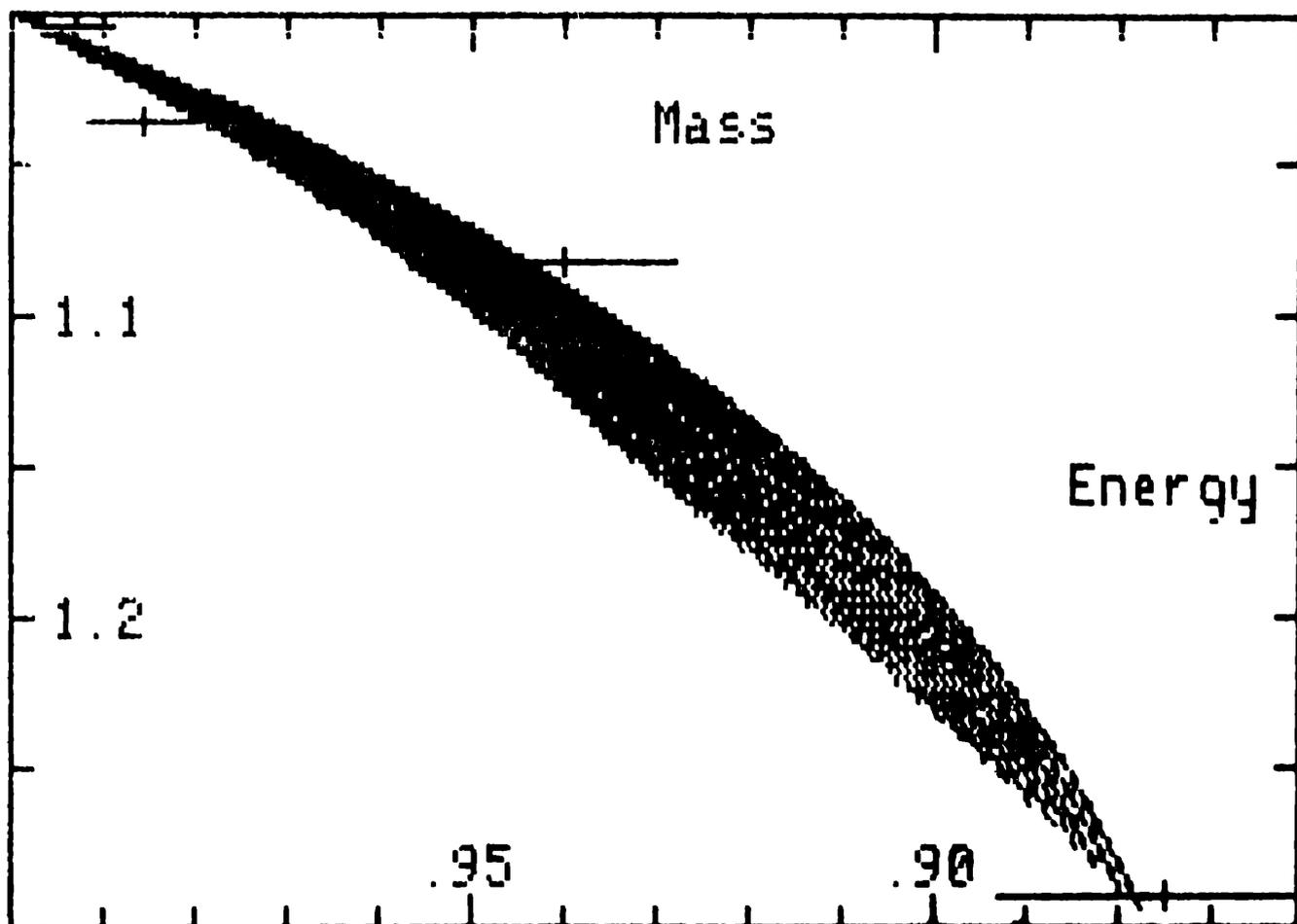


Figura 2: Relación entre $\lambda = E/E_1$ y M para $0 \leq T/\theta_1 \leq 0.5$ tal como sigue de las expresiones (10) y (12) del texto. Nótese que los valores predichos ocupan sólo una banda en el plano vs M . Los valores de λ y M hallados en experimentos numéricos (Tabla II) se hallan indicados con sus respectivas incertidumbres en M .

TABLA I

Valores de λ y μ en función de T_i y Q_i

$Q_i/Q_0 =$	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25
T_i/Q_i						
.00	$\lambda \approx 1.295$ $\mu \approx .877$	1.226 .901	1.164 .923	1.106 .949	1.054 .973	1.006 .997
.05	1.226 .890	1.162 .918	1.104 .945	1.051 .972	1.003 .998	
.10	1.170 .906	1.111 .937	1.053 .967	1.005 .996		
.15	1.125 .923	1.067 .957	1.015 .990			
.20	1.089 .940	1.032 .977				
.25	1.060 .955	1.004 .997				
.30	1.037 .970					
.35	1.021 .982					
.40	1.009 .991					
.45	1.002 .998					

TABLA II

Comparación con experimentos con $N=400$ partículas

Condiciones Iniciales	Experimentos	Modelos
$T_i = 0$ $Q_i = Q_0$	$\lambda = 1.29$ $\mu = .875 .018$	$= 1.295$ $= .877$
$T_i = .1657$ $Q_i = Q_0$	$= 1.08$ $= .94 .012$	$= 1.113$ $= .928$
$T_i = .2042$ $Q_i = 1.233Q_0$	$= 1.00$ $= .993 .004$	$= 1.000$ $= 1.000$
$T_i = 0$ $Q_i = 1.233Q_0$	$= 1.036$ $= .985 .006$	$= 1.022$ $= .989$

REFERENCIAS

- Chandrasekhar, S. y Ebert, D.O. 1972, M.N.R.A.S. 155, 435.
- Dragt, A.J. y Finn, J.M. 1976, J. Math. Phys. 17, 2215.
- Ferronsky, V.I.; Denisik, S.A. y Ferronsky, S.V. 1987,
JACOBI DYNAMICS, Reidel, Dordrecht.
- García Lambas, D.; Mosconi, M. y Sérsic, J.L. 1985,
Astrophys. Sp. Sci. 113, 89.
- Gurzadyan, V.G. y Savvidy, G.K. 1986, Astron. Astrophys.
160, 203.
- Henon, M. y Heiles, C. 1964, Astron. J. 69, 73.
- Khilmi, G.F. 1961, Qualitative Methods in the Many Body
Problem, G&B, New York.
- Lynden-Bell, D. 1967, M.N.R.A.S. 136, 101.
- McMillan, W.D. 1936, Dynamics of Rigid Bodies, Constable
Co., London.
- Navarro, J. y Mosconi, M. 1987, Astrophys. J., in press.
- Som Sunder, G. y Kochhar, R.K. 1985, M.N.R.A.S. 213, 381.
- Wintner, A. 1947, The Analytical Foundations of Celestial
Mechanics, Princeton U.P., Princeton, New Jersey, U.S.A.